УДК 37.02

# БАЗОВЫЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СПОСОБНОСТИ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

**Боженкова Л. И., доктор педагогических наук, доцент,**
**ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», г. Москва**
**krasel1@yandex.ru**

*Аннотация.* Рассмотрены базовые интеллектуальные способности и их специфика в обучении геометрии. Охарактеризована способность моделирования в обучении геометрии. Показано развитие способности понимания при работе с учебной информацией геометрии. Описана связь способности к дедуктивным рассуждениям с аксиоматическим методом в геометрии.

*Ключевые слова:* преобразование учебной информации; понимание; уровни понимания; индуктивные и дедуктивные рассуждения; аксиоматический метод; интеллектуальные умения.

# BASIC INTELLECTUAL ABILITIES IN TRAINING GEOMETRI

**L.I. Bozhenkova, doctor of pedagogical sciences, associate professor,**
**Federal state budgetary educational institution of higher education**
**«Moscow state pedagogical University», Moscow**
**krasel1@yandex.ru**

*Abstract.* Basic intellectual abilities are considered and their specificity in the teaching of geometry. The ability of modeling in teaching geometry is characterized. The development of the ability understand when working with geometry information is shown. The relation of ability to deductive reasoning with an axiomatic method in geometry is described.
*Keywords:* transformation of educational information; understanding; levels of understanding; inductive and deductive reasoning; axiomatic method; intellectual skills.

В когнитивной психологии выявлены базовые интеллектуальные способности - моделирования, понимания, способность к индуктивному и дедуктивному рассуждениям [13]. В обучении способности развиваются через формирование адекватных умений. С. Л. Рубинштейн показал, что известный уровень развития способностей является предпосылкой, внутренним условием освоения человеком определённых знаний, формирования умений, а в процессе усвоения знаний и умений развиваются способности. Он отмечал, что способности не сводятся к знаниям и умениям, а являются выражением той прибавки, которую получают эти конструкты, если они усвоены субъектом и включены в уже существовавшую целостную систему его умений [12]. Охарактеризуем указанные интеллектуальные способности и покажем, что их развитие является характерной, неотъемлемой особенностью процесса обучения геометрии, осуществляемое посредством формирования определённых умений [4].

*Способность моделирования* - одна из важнейших, необходимых для успешного обучения. Р. Ф. Абдеев отмечает: “процесс получения информации всегда сопровождается построением модели, что указывает на неразрывную связь между получением новых знаний и моделированием” [1, с. 54]. Термин «модель» широко используется и часто в различных значениях. Воспользуемся философским определением этого понятия, данного В. А. Штофом: “Под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что её изучение даёт нам новую информацию об этом объекте” [15, с. 19]. Выделяют два типа моделей по виду преобразования: вещественные и мысленные. Модели первого типа допускают предметное преобразование, и включают: а) отображающие пространственные особенности объектов; б) имеющие физическое подобие с оригиналом; в) математические и кибернетические – отображающие структурные свойства объектов. Модели второго типа допускают лишь мысленное преобразование и включают: а) образно - иконические (чертежи, рисунки, таблицы, схемы и т.п.); б) знаковые (формулы, словесные формулировки и т.п.) [15].

По мнению А. Д. Александрова, В. И. Арнольда, М. М. Постникова и др. предметом математики являются модели, при этом модель рассматривается как логическая структура, в которой описан ряд отношений между её элементами [11]. В обучении математике рассматривается два условных направления процесса построения моделей. Первое связано с построением математических моделей реальной действительности. В работах известного методиста и математика Г. Фройденталя отмечается, что обучение геометрии имеет смысл, если только используются связи с окружающим пространством, "геометрия является одной из лучших возможностей обучения математизировать реальную действительность" [14, с. 40]. Второе направление характеризуется тем, что модель получается в результате преобразования математической информации. Предметом изучения геометрии являются такие единицы учебной информации как: понятия и их определения, формулировки теорем и их доказательства, геометрические задачи, учебные тексты, математические теории и др. [4]. Большинство моделей представления информации сводится к пяти типам, из которых используются в процессе обучения геометрии все, кроме фреймовой. Например, это - схемы: определения понятий, структур теорем, поиска решения задач и др. (логические модели); разнообразные систематизирующие таблицы, информационные схемы (реляционные модели); различные классификационные схемы (семантические модели); предписания алгоритмического, полуалгоритмического типов для решения классов геометрических задач и др. (продукционные модели) [4].

В обучении геометрии рассмотренные модели получаются в результате использования следующих приёмов преобразования учебной информации: схематизация, группировка, структурирование, достраивание запоминаемого материала, алгоритмизация [4]. Трудности и проблемы, возникающие в обучении геометрии, связаны с недостаточно сформированным умением переходить от одного способа представления информации к другому, поэтому необходимо уделять специальное внимание формированию у учащихся умений преобразования информации.

Отметим особенно такой способ преобразования учебной информации, как алгоритмизация. Анализ содержания задачного материала школьного курса геометрии показал, что есть объективная возможность представить сложные действия, выполняемые при решении геометрических задач, в виде организованной совокупности простых действий. Анализ методов решения геометрических задач, выполненный с целью выяснения возможностей использования предписаний, показал, что алгоритмизации подлежат задачи на построение и задачи, решаемые аналитическими методами [3, 4].

Таким образом, необходимым условием успешного усвоения учебной информации школьного курса геометрии является её преобразование, с целью получения визуальных опорных схем, отражающих характерные, специфические свойства отдельных единиц учебной информации во всём многообразии логических связей между ними – моделей изучаемой учебной информации. Усвоенные учениками умственные приёмы преобразования учебной информации школьного курса геометрии становятся интеллектуальными умениями, развивающими способность моделирования при изучении геометрии [4].

Со способностью моделирования теснейшим образом связана базовая интеллектуальная *способность понимания*. Эта способность, как одна из важнейших категорий, наряду со знаниями, умениями, навыками входит в таксономии учебных достижений учащихся и используется для оценки эффективности систем обучения. В психологии понимание рассматривается как психический процесс включения информации о чём-либо, в прежний опыт ученика, в усвоенные ранее знания и постижение на этой основе смысла и значения события, факта, содержания воздействия. К формам понимания относятся: классификация предметов, подведение частного под общее понятие, раскрытие причинных связей явлений, их внутренней структуры. Исследуя проблему понимания, В. В. Знаков выделяет три уровня понимания: понимание-узнавание, понимание-гипотеза, понимание-объединение [9].

В процессе обучения геометрии естественно говорить о понимании учениками составляющих учебного текста: определений понятий, теорем, методов решения задач определённых типов и классов, подлежащих усвоению. Так, о сформированности способности понимания изученного определения понятия, свидетельствует наличие у ученика умений: составить классификационную схему (понимание-объединение); подвести объект под понятие, вывести следствия из факта принадлежности объекта объёму данного понятия (понимание-узнавание) и др. При установлении связей между известными и неизвестными объектами геометрической задачи, при мысленном объединении составляющих элементов ситуации в единое целое и т.д. развиваются дивергентные способности (понимание-гипотеза). Если требуется выявить общий способ решения задач определённого типа, то имеет место понимание-объединение т.к. неизвестным оказывается способ объединения отдельных частей в целостную структуру – предписание для решения задач определённого класса. То есть, при составлении учениками предписаний имеют место понимание-гипотеза и понимание-объединение, а при использовании таких предписаний имеет место понимание-узнавание [4, 5].

Понимание учебного содержания параграфа (пункта) школьного учебника геометрии – непростая задача даже для подготовленного ученика, читающего текст самостоятельно. Чтобы понимание стало средством усвоения знаний, необходимо сделать его целью обучения. То есть, в умственном опыте ученика должны быть знания о том, как *понимать* процесс понимания. Исследуя проблему, связанную с пониманием смысла новой информации, американские психологи К. А. Роусон и Дж. Данлоски установили, что понимание связано с оценкой самим человеком того, насколько хорошо он понимает текст [16]. К ориентирам, свидетельствующим о понимании текста, учёные относят следующие умения: преобразование изученного материала из одной формы в другую; интерпретация изученного материала; предположения о дальнейшем ходе развития действий, явлений и др. Если понимание человека проявляется в овладении этими ориентирами, то у него сформирован метакогнитивный контроль понимания. Проблема понимания связана с задачей извлечения знаний из текста и выделения его смысла, для чего в инженерии знаний разработана процедура понимания текста [2]. Трансформация этой процедуры в процесс обучения геометрии, использование уровней и условий понимания, типов моделей представления учебной информации позволили разработать структуру процесса активизации понимания учебного текста школьного курса геометрии (таблица 1) [4]. Шаги 1 – 3 этой процедуры позволяют ученику приступить к изучению новой информации, актуализируя содержание наличного умственного опыта, прогнозировать содержание материала, подлежащего изучению. Ученики представляют учебную информацию в виде определённых опорных схем, первоначально несовершенных, уточняя их при выполнении следующих шагов. На третьем шаге, используя аналогию, ученики выдвигают гипотезы о формулировках некоторых теорем, пытаются установить их истинность (четвёртый шаг процедуры). Пятый и шестой шаги процедуры позволяют целенаправленно сравнить полученные результаты (свои предположения) с содержанием учебной информации изучаемого параграфа (пункта). При таком подходе к изучению нового выполняются условия продуктивного непроизвольного запоминания учебной информации, у учащихся возникает познавательный интерес, который развивается при дальнейшем освоении темы на выбранном уровне с использованием определённых интеллектуальных умений [4].

*Таблица 1*

**Структура процесса активизации понимания учебного текста школьного курса геометрии**

| *Уровни понимания учебных текстов* | *Процедуры понимания учебных текстов школьного курса геометрии* | *Конструирование ситуаций, посредством которых реализуется понимание текстов* |
|---|---|---|
| *предпонимание*<br><br>*понимание – гипотеза* | 1) выдвижение предварительной гипотезы о смысле всего текста (предугадывание);<br>2) выявление значений непонятных слов (предположение); | 1) конструирование отдельной ситуации, совместимой с учебной информацией, имеющейся в распоряжении; |
| *понимание – гипотеза* | 3) возникновение общей гипотезы о содержании текста (о знаниях); | 2) конструирование отдельных утверждений по аналогии с существующей структурой |
| *понимание – гипотеза*<br><br>*понимание – объединение* | 4) формирование смысловой структуры текста за счет установления внутренних связей между ключевыми фрагментами, за счет образования абстрактных понятий, обобщающих конкретные фрагменты знаний | 3) конструирование различных моделей единиц учебной информации: определений понятий, формулировок теорем, процедур поиска и оформления доказательств теорем. |
| *понимание –* | 5) восприятие и извлечение учебной | 4) уточнение набора полученных |

| | | |
|---|---|---|
| *узнавание, понимание - гипотеза, понимание - объединение* | информации;<br>6) корректировка общей гипотезы, относительно обнаруженной в тексте информации | схем; 5) конструирование новых информационных схем учебного содержания;<br>6) воспроизведение воспринятого |

Успешное использование процедуры понимания на любом (даже начальном) этапе освоения школьного курса геометрии предполагает наличие у ученика: а) знаний и интеллектуальных умений, которые к моменту освоения новой учебной информации объективно известны; б) представлений о структурированности учебного содержания (понятия; отношения между понятиями, описывающиеся с помощью теорем; теоремы-свойства, теоремы-признаки; различные типы геометрических задач, методы их решения и др.); в), понимания того факта, что новая учебная информация выводится из уже известных знаний школьного курса геометрии; г) желания предпринять попытку поиска тех взаимосвязей между собственным знанием и учебной информацией, подлежащей усвоению, которые позволят подойти к открытию нового знания. При первоначальной организации понимания текста эта процедура может быть упрощена и трансформирована в приём работы с учебным текстом [4, 5].

Развитию понимания учебной информации на этапе применения знаний способствует составление геометрических задач - одного из важнейших средств развития креативности учащихся. Обучение учащихся составлению задач следует осуществлять постепенно, с первых шагов обучения геометрии [4].

Процессы понимания доказательства теорем и решения задач тесно связаны с базовой интеллектуальной способностью к индуктивным и дедуктивным рассуждениям, которая определяет самостоятельность мышления. Индукция позволяет вывести на уровень сознания подсознательный процесс выдвижения гипотез, что способствует достижению успеха при решении задач. Эта способность предполагает выход ученика за пределы данной ему информации для выполнения обобщения. С. Л. Рубинштейн отмечал, что “к общим понятиям или положениям в науке приходят двумя путями: в результате процесса обобщения - путь индукции; в результате анализа, выделяющего существенные свойства, стороны и соотношения явления; он лежит, в конечном счёте, и в основе первого пути” [13, с. 90]. Поэтому, у учащихся необходимо формировать умения использовать индуктивные рассуждения при освоении школьного курса геометрии, для чего схемы, лежащие в основе индуктивного рассуждения и видов индукции (полной, неполной, математической) полезно включить в содержание метазнаний [4].

В основе дедуктивного рассуждения лежит способность к дедукции, развивающаяся посредством совершенствования дедуктивного мышления (вывод логических умозаключений из имеющихся посылок). Так как в дедуктивном умозаключении происходит объединение знаний, данных в отдельных посылках, то его связывают с анализом и синтезом. В. И. Арнольд отмечал, что каждый школьник должен овладеть умением строгого логического рассуждения и возможностью получать этим способом надёжные выводы [11]. Наиболее распространённая схема рассуждений (обоснования суждений), введённая Аристотелем и используемая при дедуктивном умозаключении, - силлогизм [10]. К использованию силлогизмов в процессе обучения геометрии можно подходить двумя путями. Первый – явное их использование, что предполагает достаточно серьёзное знакомство с элементами логики, этот путь вряд ли возможен в условиях обучения в массовой школе, но вполне допустим в рамках профильной дифференциации обучения. Второй путь - использование силлогизмов на содержательном уровне – приемлем без ограничений. В этом случае используются термины: обоснование (большая посылка); условие и промежуточное условие (малая посылка); вывод (промежуточный вывод) [4].

Использование силлогизмов вносит вклад в понимание сущности аксиоматического метода. С дидактической точки зрения разница между аксиоматикой и традиционной дедуктивностью разъясняется с помощью терминов «глобальное упорядочение» и «локальное упорядочение» соответственно [14]. Г. Фройденталь считает, что учащихся не следует обучать аксиоматике в школе, но следует рассматривать процесс аксиоматизации, то, что так высоко ценит настоящий математик – «локальные упорядочения». Он отмечает, что в «локальном упорядочении» речь идёт не о полной аксиоматически обоснованной теории упорядочения, не о сложных дедуктивных рассуждениях, а о таком процессе, когда осознаются наглядные, но не всегда сознательно воспринимаемые факты [14].

Процесс творческой переработки информации при изучении отдельных тем школьного курса геометрии, когда школьник осваивает её в процессе собственной деятельности, целесообразно связать с «локальным упорядочением». Примером таких упорядочений является работа с геометрическими понятиями, «открытие» теорем, «открытие» теории параллелограмма [4].

Краткое раскрытие истории аксиоматического метода от Евклида до Гильберта, роли научной деятельности Д. Гильберта в создании аксиоматического метода, понятие абсолютной геометрии, история пятого постулата, рассказ об открытиях геометрии Лобачевского, рассмотрение на доступном уровне различных интерпретаций геометрии Лобачевского с учащимися, интересующимися математикой, изучение всеми учащимися биографии Н. И. Лобачевского, основных этапов его педагогической деятельности - способы создания у учащихся представлений о значении аксиоматического метода в познании, расширение их знаний [8].

Определённый вклад в создание представлений об аксиоматическом методе вносит иллюстрация аксиоматики Г. Вейля на заключительном этапе обучения теме «Векторы» в планиметрии [7]. Выделение первоначальных понятий и операций над ними, рассмотрение аксиом, введение на их основе определений и теорем, которые хорошо известны учащимся, рассмотрение известных объектов с новых теоретических позиций, введение определения понятия прямой, которая в евклидовой геометрии являлась неопределяемым понятием и др. расширяет представления учащихся о геометрии, вносит свой вклад в понимание её основополагающих идей [4, 6].

К умениям, развивающим способность к индуктивным и дедуктивным рассуждениям, относятся те, в результате использования которых, формулируется некоторое суждение. Главной характеристикой этих умений, с точки зрения их содержания, является использование комплекса основных мыслительных операций: анализа, синтеза, сравнения, обобщения, как средства получения свойств и признаков объектов. В «чистом» виде эти операции крайне редко используются в обучении геометрии. Различные их сочетания, зависящие от специфики учебной информации курса геометрии, образуют системы интеллектуальных действий [4].

Учёт специфики школьного курса геометрии в развитии базовых интеллектуальных способностей и выполненные: логико-математический, логико-дидактический анализ процессов формирования математических понятий, обучения доказательству теорем, решения геометрических задач; анализ исследований, представленных в теории и методике обучения математике, связанных с этими процессами позволили, отобрать, составить и систематизировать приёмы умственных действий. Их использование обучающимися при изучении геометрии будет способствовать развитию интеллектуальных способностей учащихся [4].

**Литература**

1. Абдеев Р.Ф. Философия информационной цивилизации. – М.: ВЛАДОС, 1994. –336 с.
2. Базы знаний интеллектуальных систем / Гаврилова Т. А. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
3. Боженкова Л. И. Алгоритмический подход в обучении геометрии учащихся 6-8 классов: дис. ... канд. пед. наук. – Москва: МГПИ им. В. И. Ленина, 1990. – 170 с.
4. Боженкова Л. И. Теоретические основы интеллектуального воспитания учащихся в обучении геометрии: Монография. – Калуга: КПГУ, 2007. – 281 с.
5. Боженкова Л. И. Развитие способности понимания в обучении математике / Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования: материалы международной научно-практической конференции. – Рязань: РГУ им. С.А. Есенина, 2016. – С. 357-362.
6. Боженкова Л. И. Научные основы школьного курса геометрии в обучении // Образовательные ресурсы и технологии. – 2016. – № 2 (14). – С. 11-16.
7. Болтянский В. Г., Яглом И. М. Векторы в курсе геометрии средней школы. Пособие для учителя. – М.: Учпедгиз, 1962. – 96 с.
8. Историко-математические исследования: Выпуск IX (посвящён 100-летию со дня смерти Н.И. Лобачевского) / Под редакцией Г. Ф. Рыбкина, А. П. Юшкевича. – М.: ГИТТЛ, 1956. – С. 5-168.
9. Знаков В. В. Понимание как проблема психологии мышления // Вопросы психологии. – 1991. – № 1. – С. 18-26.

10. Лакатос И. Доказательства и опровержения (Как доказываются теоремы). Пер. с англ. – М.: Наука, 1967. –152 с.
11. Математика в образовании и воспитании. Сост. В.Б. Филиппов. – М.: ФАЗИС, 2000. – 256 с.
12. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. – СПб.: Питер, 2000. – 705 с.
13. Солсо Р. Когнитивная психология. – СПб.: Питер, 2002. – 592 с.
14. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. 1. /Под ред. Н. Я. Виленкина. - М.: Просвещение, 1982. –208 с.
15. Штофф В. А. Моделирование и философия. – М.: Наука, 1966. – С. 19.
16. Rawson K. A., Dunlosky J. Are perfomance predictions for text based on ease of processing? // Journal of experimental psychology: learning, memory and cognition. – 2002. – V. 28. – N 1. – p. 69-80.